Ecuaciones Diferenciales de Orden Superior

Parte III

Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden

Ing. Ramón Abascal

Profesor Titular de Análisis de Señales y Sistemas
y Teoría de los Circuitos II
en la UTN, Facultad Regional Avellaneda
Buenos Aires, Argentina

2006

Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden.

3.1 - Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden. Ecuación Indicial:

En esta tercera parte veremos las Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden, con coeficientes variables, del tipo de la siguiente, que es particularmente fértil en cuanto a sus aplicaciones:

$$y'' + \eta(x) \cdot y' + \mu(x) \cdot y = 0$$

Aquí,

$$\eta(x) = \frac{\alpha(x)}{(x-a)} \qquad \text{y} \qquad \mu(x) = \frac{\beta(x)}{(x-a)^2} \tag{3.1}$$

Se puede ver que $\eta(x)$ tiene un polo de primer orden en $x = a$, en tanto que $\mu(x)$ tiene en el mismo punto un polo de segundo orden. Reemplazando según (3.1), podemos reformular la ecuación diferencial así:

$$(x-a)^2\, y'' + (x-a)\,\alpha(x) \cdot y' + \beta(x) \cdot y = 0 \tag{3.2}$$

Si $\alpha(x)$ y $\beta(x)$ son analíticas en $x = a$, esta ecuación acepta una solución en serie de potencias de $(x-a)$, como la que sigue:

$$y(x) = (x-a)^\gamma \sum_{m=0}^{\infty} c_m (x-a)^m = (x-a)^\gamma \left[c_o + c_1 (x-a) + c_2 (x-a)^2 + \ldots \right] \tag{3.3}$$

donde $c_o \neq 0$

γ es un número, en general complejo. Más adelante veremos cómo determinarlo.

Probaremos a continuación la validez de la (3.3). Para ello, a partir de la (3.2) desarrollaremos los diferentes elementos que aparecen en la (3.3). Iniciaremos la tarea con las dos funciones de x, las que expresaremos como series de potencias alrededor del punto a:

$$\alpha(x) = \alpha_o + \alpha_1 (x-a) + \alpha_2 (x-a)^2 + \alpha_3 (x-a)^3 + \ldots$$

y

$$\beta(x) = \beta_o + \beta_1 (x-a) + \beta_2 (x-a)^2 + \beta_3 (x-a)^3 + \ldots$$

Seguiremos con el cálculo de las derivadas de $y(x)$, a partir de (3.3), la que previamente desarrollaremos también en serie de potencias:

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m (x-a)^{\gamma+m} \tag{3.4}$$

Su derivada primera es:

$$y'(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (\gamma+m)\, c_m (x-a)^{\gamma+m-1} = (x-a)^{\gamma-1} \left[c_o \gamma + c_1 (\gamma+1)(x-a) + \right.$$

$$\left. + \; c_2 (\gamma+2)(x-a)^2 + \ldots \right]$$

A continuación derivaremos nuevamente esta última función:

$$y''(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m (\gamma + m)(\gamma + m - 1)(x - a)^{\gamma + m - 2}$$

$$\therefore \qquad y''(x) = (x - a)^{\gamma - 2} [c_o \gamma(\gamma - 1) + c_1(\gamma + 1)\gamma (x - a) + c_2(\gamma + 2)(\gamma + 1)(x - a)^2 + \ldots]$$

Al reemplazar ambas derivadas en (3.2), resulta:

$$\begin{aligned}
&(x - a)^{\gamma} [c_o\gamma(\gamma - 1) + c_1(\gamma + 1)\gamma(x - a) + c_2(\gamma + 2)(\gamma + 1)(x - a)^2 \ldots] + \\
&+ [\alpha_o + \alpha_1(x - a) + \ldots].(x - a)^{\gamma} . [c_o\gamma + c_1(\gamma + 1)(x - a) + \ldots] + \\
&+ [\beta_o + \beta_1(x - a) + \ldots](x - a)^{\gamma} [c_o + c_1(x - a) + \ldots] = 0
\end{aligned}$$

O también, reagrupando términos de modo de sacar los coeficientes c_m como factor común:

$$\begin{aligned}
&c_o\gamma(\gamma - 1)(x - a)^{\gamma} + c_1\gamma(\gamma + 1)(x - a)^{\gamma + 1} + c_2(\gamma + 1)(\gamma + 2)(x - a)^{\gamma + 2} + \\
&+ \ldots + c_o\gamma [\alpha_o(x - a)^{\gamma} + \alpha_1(x - a)^{\gamma + 1} + \alpha_2(x - a)^{\gamma + 2} + \alpha_3(x - a)^{\gamma + 3} + \\
&+ \ldots] + c_1(\gamma + 1)[\alpha_o(x - a)^{\gamma + 1} + \alpha_1(x - a)^{\gamma + 2} + \alpha_2(x - a)^{\gamma + 3} + \ldots] + \\
&+ c_2(\gamma + 2)[\alpha_o(x - a)^{\gamma + 2} + \alpha_1(x - a)^{\gamma + 3} + \ldots] + \ldots + \\
&+ c_o[\beta_o(x - a)^{\gamma} + \beta_1(x - a)^{\gamma + 1} + \beta_2(x - a)^{\gamma + 2} + \beta_3(x - a)^{\gamma + 3} + \ldots] + \\
&+ c_1[\beta_o(x - a)^{\gamma + 1} + \beta_1(x - a)^{\gamma + 2} + \beta_2(x - a)^{\gamma + 3} + \ldots] + \\
&+ c_2[\beta_o(x - a)^{\gamma + 2} + \beta_1(x - a)^{\gamma + 3} + \ldots] + c_3[\beta_o(x - a)^{\gamma + 3} + \ldots] + \ldots = 0
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Para que se cumpla esta igualdad es condición suficiente que los coeficientes correspondientes a cada una de las potencias de $(x - a)$ sean nulos todos ellos. De acuerdo con esto, agrupando los términos que multiplican a la potencia de menor grado de $(x - a)$, que como vemos corresponde a $(x - a)^{\gamma}$, encontramos la ecuación siguiente, que nos permitirá obtener el valor de γ:

$$\gamma(\gamma - 1)c_o + \gamma\,\alpha_o\,c_o + \beta_o\,c_o = 0$$

En efecto, como impusimos la condición:

$$c_o \neq 0,$$

simplificando, aparece la siguiente ecuación de segundo grado

$$\gamma(\gamma - 1) + \gamma\,\alpha_o + \beta_o = 0$$

$$\therefore \qquad \gamma^2 + (\alpha_o - 1)\gamma + \beta_o = 0$$

Las raíces de esta ecuación, que se conoce como *"Ecuación Característica o Indicial"*, definen el o los valores de γ que, como ya hemos dicho, son en general números complejos.

$$\gamma = \frac{-(\alpha_o - 1) \pm \sqrt{(\alpha_o - 1)^2 - 4\beta_o}}{2} \tag{3.6}$$

De aquí se concluye que los posibles valores de γ son:

- Dos números complejos conjugados entre sí
- Dos números reales diferentes, o bien
- Que exista un único valor para γ (Raíz doble), que en este caso será también real.

Veremos a continuación cómo determinar los coeficientes c_m a partir de las ecuaciones (3.5) y (3.6).

3.2 - Determinación de los coeficientes c_m:

Del análisis de la ecuación (3.5) surge que los distintos coeficientes c_m no son independientes entre sí. Por lo tanto, para su definición, se conviene en elegir $c_o = 1$. A partir de tal elección, y teniendo en cuenta que, como dijimos, deben ser nulos los coeficientes que multiplican a cada una de las potencias de (x - a) de igual grado, es posible determinar los demás coeficientes c_m.

Comenzaremos por calcular c_1 a partir de la mencionada ecuación (3.5):

Coeficiente de $(x - a)^{\gamma+1}$:

$$[\, c_1 \gamma (\gamma + 1) + \alpha_o (\gamma + 1) c_1 + \alpha_1 \gamma c_o + c_1 \beta_o + c_o \beta_1 \,] (x - a)^{\gamma+1} = 0$$

Reemplazamos el valor adoptado, $c_o = 1$, con lo que resulta:

$$c_1 \gamma (\gamma + 1) + \alpha_o (\gamma + 1) c_1 + \alpha_1 \gamma + c_1 \beta_o + \beta_1 = 0$$

De aquí:

$$c_1 = \frac{-\ \alpha_1 \gamma + \beta_1}{\gamma (\gamma + 1) + \alpha_o (\gamma + 1) + \beta_o}$$

Desde luego, para calcular c_1, el valor de γ a utilizar en esta ecuación debe ser uno cualquiera de los dos obtenidos al resolver la ecuación indicial. Verificaremos ahora que, con el soporte de la ecuación indicial, es posible hallar los demás coeficientes en forma sucesiva, a partir del conocimiento de los inmediatos anteriores.

Trataremos de calcular c_2, partiendo de los coeficientes de $(x - a)^{\gamma+2}$ en la ecuación (3.5):

$$[\, c_2 (\gamma + 1)(\gamma + 2) + c_o \alpha_2 \gamma + c_1 \alpha_1 (\gamma + 1) + c_2 \alpha_o (\gamma + 2) +$$
$$+ c_o \beta_2 + c_1 \beta_1 + c_2 \beta_0 \,] . (x - a)^{\gamma+2} = 0$$

Por lo tanto:

$$c_2 = \frac{(\alpha_2 \gamma + \beta_2) + c_1 [\, \alpha_1 (\gamma + 1) + \beta_1 \,]}{(\gamma + 1)(\gamma + 2) + \alpha_o (\gamma + 2)}$$

Los demás coeficientes, c_3, c_4, etc., se determinan de modo similar.

3.3 - Caso particular: a = 0.

En el caso particular en que a = 0, la ecuación:

$$y'' + \eta(x) \, . \, y' + \mu(x) \, . \, y = 0$$

se resuelve de manera idéntica, bastando sólo con hacer

$$\alpha(x) = x \, . \, \eta(x)$$

y

$$\beta(x) = x^2 . \, \mu(x)$$

y desarrollar luego la ecuación en potencias de x alrededor del punto x = 0.

Con esto, la ecuación equivalente de la (3.2) queda modificada como sigue:

$$x^2 \, y'' + x \, . \, \alpha(x) \, . \, y' + \beta(x) \, . \, y = 0$$

A su vez, la solución, ecuación (3.4), se transforma en este caso en

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \, x^{\gamma+m} \tag{3.7}$$

Para terminar, las fórmulas para el cálculo de los coeficientes son idénticas a las del caso general, ya que en ellas no interviene la constante "a".

3.4 - Ecuación Diferencial Hipergeométrica de Gauss:

Se llama así a la ecuación [(1)]

$$x(1-x)\,y'' + [\,C - x - (A+B)\,x\,]\,y' - A\,B\,y = 0 \tag{3.8}$$

Al compararla con la forma general de la Ecuación de Segundo Orden y Coeficientes Variables:

$$y'' + \eta(x) \, . \, y' + \mu(x) \, . \, y = 0$$

podemos ver que los valores de $\eta(x)$ y $\mu(x)$ son respectivamente:

$$\eta(x) = \frac{C - (1 + A + B)\,x}{x(1-x)}$$

y

$$\mu(x) = \frac{-\,A\,B}{x(1-x)}$$

(1) A esta altura puede parecer arbitraria la forma dada a la ecuación, así como la elección de las constantes A, B y C. Sin embargo hay una razón valedera para ello, como se comprenderá al analizar las ecuaciones (3.12) y (3.14).

Los puntos singulares de $\eta(x)$ y de $\mu(x)$ son en ambos casos:

$$x = 0 \quad y \quad x = 1$$

Para resolver la ecuación hipergeométrica debemos efectuar su desarrollo en serie alrededor del punto $x = 0$. Se comienza por transformar la ecuación multiplicando todos los términos por x, y dividiéndolos por 1 - x:

$$x^2 y'' + x \frac{[C - (1 + A + B) x]}{(1 - x)} y' - x \frac{AB}{(1 - x)} y = 0$$

Al comparar esta ecuación con la (3.2),

$$x^2 y'' + x \,.\, \alpha(x) \,.\, y' + \beta(x) \,.\, y = 0 \tag{3.2}$$

se verifican las siguientes coincidencias:

$$\alpha(x) = \frac{C - (1 + A + B) x}{1 - x}$$

y

$$\beta(x) = -\frac{AB}{1 - x} x$$

A continuación desarrollaremos estas dos expresiones en serie de potencias de x, en el intervalo

$$0 < x < 1$$

obteniendo, respectivamente,

$$\alpha(x) = [C - (1 + A + B) x] (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots + x^n + \ldots) =$$
$$= C + C x + C x^2 + C x^3 + C x^4 + \ldots - x - x^2 - x^3 - x^4 - x^5 - \ldots -$$
$$- A x - A x^2 - A x^3 - A x^4 - \ldots - B x - B x^2 - B x^3 - B x^4 - \ldots$$

y

$$\beta(x) = - A B x \,.\, (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots + x^n + \ldots)$$

De aquí deducimos las relaciones:

$$\alpha(0) = \alpha_o = C \qquad y \qquad \beta(0) = \beta_o = 0$$

Reemplazando estos valores en la ecuación indicial,

$$\gamma(\gamma - 1) + \gamma\, \alpha_o + \beta_o = 0$$

la misma queda así:

$$\gamma(\gamma - 1) + C \,.\, \gamma = 0$$

Por tanto, las raíces de la ecuación indicial son, en el caso presente:

$$\gamma = 0 \qquad ó \qquad \gamma = 1 - C$$

Si elegimos la primera de ellas, $\gamma = 0$, según (3.7) la solución de la ecuación hipergeométrica es:

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m = c_o + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \ldots$$

y por lo tanto:

$$y'(x) = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 + 5c_5 x^4 + \ldots$$

e
$$y''(x) = 2c_2 + 6c_3 x + 12c_4 x^2 + 20c_5 x^3 + \ldots$$

A continuación reemplazaremos estos valores en la ecuación (3.8):

$$x(1-x)(2c_2 + 6c_3 x + 12c_4 x^2 + 20c_5 x^3 + \ldots) +$$

$$+ [C - (A+B+1)x](c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 + 5c_5 x^4 + \ldots) -$$

$$- AB(c_o + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \ldots) = 0$$

Llegados a este punto, podemos obtener el coeficiente de x^0 (es decir, el término independiente) a partir de la ecuación:

$$C c_1 - A B c_o = 0$$

En efecto, como hemos aceptado para c_o el valor 1, $c_o = 1$, al reemplazar queda:

$$c_1 = \frac{A B}{C}$$

De modo similar se calculan los otros coeficientes: Por ejemplo, para el término de primer grado, x, la ecuación resulta:

$$[2c_2 - c_1(A+B+1) + 2Cc_2 - ABc_1]\, x = 0$$

De aquí:

$$2(C+1)c_2 = (A+B+AB+1)c_1 \tag{3.9}$$

$$\therefore \qquad c_2 = \frac{(A+B+AB+1)}{2(C+1)} \; \frac{A B}{C}$$

Notemos que la ecuación (3.9) puede escribirse también así:

$$c_2 = \frac{(A+B+AB+1)}{2(C+1)} c_1 = \frac{(A+1).(B+1)}{(1+1).(C+1)} c_1 \tag{3.10}$$

Como veremos enseguida, esta forma es particularmente interesante. Efectivamente, en el caso de x^2, la ecuación del coeficiente correspondiente es:

$$[-2c_2 + 6c_3 - 2c_2(A+B+1) + 3Cc_3 - ABc_2]\, x^2 = 0$$

$$\therefore \qquad 3(C+2)\, c_3 = (2A + 2B + AB + 4)c_2$$

Despejamos c_3 y obtenemos:

$$c_3 = \frac{(2A + 2B + AB + 4)}{3(C+2)} c_2 = \frac{(A+2).(B+2)}{(1+2).(C+2)} c_2 \qquad (3.11)$$

A partir de las expresiones (3.10) y (3.11), se deduce por recurrencia la siguiente fórmula general que permite obtener cualquier coeficiente en función del inmediato anterior:

$$c_{n+1} = \frac{(A+n).(B+n)}{(1+n).(C+n)} c_n \qquad (3.12)$$

La solución de la ecuación hipergeométrica es, por su parte:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 1 + \frac{AB}{C} x + \frac{A(A+1).B(B+1)}{2C.(C+1)} x^2 + \ldots \qquad (3.13)$$

3.5 - Convergencia de la solución:

Probaremos aquí que la solución hallada converge para todo x positivo y menor que 1. En efecto, de acuerdo con lo visto en el apartado anterior, se puede establecer la siguiente relación entre dos coeficientes consecutivos

$$(1+n)(C+n)\ c_{n+1} = (A+n)(B+n)\ c_n$$

Podemos deducir de esta ecuación que la razón entre dos coeficientes consecutivos es:

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{(A+n)(B+n)}{(1+n)(C+n)} \qquad (3.14)$$

Multipliquemos por x en ambos miembros:

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} x = \frac{(A+n)(B+n)}{(1+n)(C+n)} x$$

Por la propiedad del módulo de un producto, es:

$$\left| \frac{c_{n+1}}{c_n} x \right| = \left| \frac{(A+n)(B+n)}{(1+n)(C+n)} \right| . |x|$$

Cuyo límite es:

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{(A+n)(B+n)}{(1+n)(C+n)} \right| . |x| = |x|$$

De aquí deducimos que, para que la solución converja, es condición necesaria que sea $|x| < 1$ (Criterio del cociente entre dos términos consecutivos de la serie).

Es decir que la solución hallada es válida para valores de x entre 0 y 1. Este resultado era de esperar, ya que la ecuación tiene justamente un punto singular en $x = 1$.

3.6 - Ecuación de Legendre:

La *Ecuación de Legendre* es una ecuación diferencial de segundo orden y coeficientes variables, de la forma:

$$(1 - x^2)\, y'' - 2\, x\, y' + n\,(n + 1)\, y = 0$$

Para resolverla, se la asimila a una ecuación hipergeométrica, para lo cual se efectúa el cambio de variable:

$$x = 1 - 2\, t$$

Las relaciones que veremos a continuación conducen a la solución del problema. En primer lugar elevaremos x al cuadrado:

$$x^2 = 1 - 4\, t + 4\, t^2$$

A partir de aquí, los coeficientes multiplicadores de y'' e y' resultan, respectivamente:

$$1 - x^2 = 4\, t\, (1 - t) \qquad \text{y} \qquad -2\, x = -2 + 4\, t$$

A su vez, la diferencial de x es, obviamente:

$$d\, x = -2\, d\, t,$$

y por lo tanto, también:

$$\frac{d\, t}{d\, x} = -\frac{1}{2}$$

Como ahora la variable es t, expresaremos las derivadas sucesivas de y en función de t:

$$y'_x = \frac{d\, y}{d\, x} = \frac{d\, y}{d\, t}\,\frac{d\, t}{d\, x} = -\frac{1}{2}\,\frac{d\, y}{d\, t} = -\frac{1}{2}\, y'_t$$

$$y''_x = \frac{d\, y'}{d\, x} = \frac{d\, y'}{d\, t}\,\frac{d\, t}{d\, x} = -\frac{1}{2}\, y''_t \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}\, y''_t$$

Al reemplazar todos estos valores en la ecuación de Legendre, la misma queda así:

$$t\,(1 - t)\, y''_t - (2\, t - 1)\, y'_t + n\,(n + 1)\, y_t = 0$$

Si comparamos esta ecuación con la hipergeométrica (3.8), que hemos modificado previamente cambiando el nombre de la variable x por t,

$$t\,(1 - t)\, y'' + [\,C - t - (A + B)\, t\,]\, y' - A\, B\, y = 0$$

obtenemos el siguiente sistema auxiliar de ecuaciones:

$$\begin{cases} C = 1 \\ A + B + 1 = 2 \\ n\,(n + 1) = -A\, B \end{cases}$$

Para resolverlo, empezaremos por simplificar la segunda ecuación.

$$A + B = 1$$

De la que resulta el siguiente subsistema, que relaciona las constantes A y B entre sí:

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ A \, . \, B = - n (n + 1) \end{cases}$$

Por la simetría que presenta el mismo podemos elegir, indistintamente,

$$A = - n \qquad B = n + 1$$

o bien $\quad B = - n \qquad A = n + 1$

Elegiremos la primera de estas relaciones y reemplazaremos los valores de A y B en la solución (3.13) de la hipergeométrica, en la cual, consecuentemente, también hemos cambiado el nombre de la variable x por t:

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n = 1 + \frac{A B}{C} t + \frac{A (A + 1) . B (B + 1)}{1 . 2 . C . (C + 1)} t^2 +$$

$$+ \frac{A (A + 1) (A + 2) . B (B + 1) (B + 2)}{1 . 2 . 3 . C . (C + 1) (C + 2)} t^3 + \ldots$$

Para obtener el resultado en función de x debemos recordar que

$$t = \frac{1}{2} (1 - x),$$

De este modo hallamos la solución siguiente:

$$y = 1 - n (n + 1) \frac{(1 - x)}{2} - \frac{n (- n + 1) (n + 1) (n + 2)}{1 . 2 . 1 . 2} \frac{(1 - x)^2}{4} -$$

$$- \frac{n (- n + 1) (- n + 2) (n + 1) (n + 2) (n + 3)}{1 . 2 . 3 . 1 . 2 . 3} \frac{(1 - x)^3}{8} + \ldots$$

que, ordenada adecuadamente, queda finalmente así:

$$y = 1 + n (n + 1) \frac{(x - 1)}{2} + \frac{n (n - 1) (n + 1) (n + 2)}{2 ! \, . \, 2 !} \frac{(x - 1)^2}{4} +$$

$$+ \frac{n (n - 1) (n - 2) (n + 1) (n + 2) (n + 3)}{3 ! \, . \, 3 !} \frac{(x - 1)^3}{8} + \ldots$$

Si n es un número entero positivo, la serie es finita, pues, como puede verse, los coeficientes se anulan a partir de aquel en el que aparece por primera vez el binomio (n - n). En tal caso, la solución de la ecuación es un polinomio, que se conoce como Polinomio de Legendre.

3.7 - Polinomios de Legendre:

Calcularemos en forma directa algunos de los polinomios de Legendre:

Si n = 0, entonces:

$$P_o(x) = 1$$

Para n = 1:

$$P_1(x) = 1 + 2\,\frac{(x-1)}{2} = 1 + x - 1 = x$$

Para n = 2:

$$P_2(x) = 1 + \frac{2\,.\,3\,(x-1)}{2} + \frac{2\,.\,1\,.\,3\,.\,4\,(x-1)^2}{(2!)^2\,.\,4} =$$

$$\therefore \qquad P_2(x) = 1 + 3x - 3 + \frac{3}{2}(x^2 - 2x + 1) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

Para el cálculo de los coeficientes de mayor índice resulta práctico utilizar la siguiente fórmula conocida como la *Regla de Olinde Rodrigues*, en homenaje a su descubridor:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n\; n!}\,\frac{d^n}{dx^n}\,(x^2 - 1)^n \qquad (3.15)$$

A partir de ella, obtenemos, por ejemplo:

Para n = 2

$$P_2(x) = \frac{1}{2^2\; 2!}\,\frac{d^2}{dx^2}(x^2-1)^2 = \frac{1}{8}\,\frac{d}{dx}2(x^2-1)\,2x = \frac{1}{8}\,\frac{d}{dx}(4x^3 - 4x)$$

$$\therefore \qquad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

Resultado que, como puede verse, coincide con el obtenido por cálculo directo. De igual forma,

Para n = 3, es

$$P_3(x) = \frac{1}{2^3\; 3!}\,\frac{d^3}{dx^3}(x^2-1)^3 = \frac{1}{48}\,\frac{d^3}{dx^3}(x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1) =$$

$$= \frac{1}{48}\,\frac{d^2}{dx^2}(6x^5 - 12x^3 + 6x) = \frac{1}{48}\,\frac{d}{dx}(30x^4 - 36x^2 + 6) =$$

$$\therefore \qquad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

Para n = 4 ,

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

Con similar procedimiento se determinan los demás polinomios:

$$P_5(x) = \frac{1}{8}\left(63x^5 - 70x^3 + 15x\right)$$

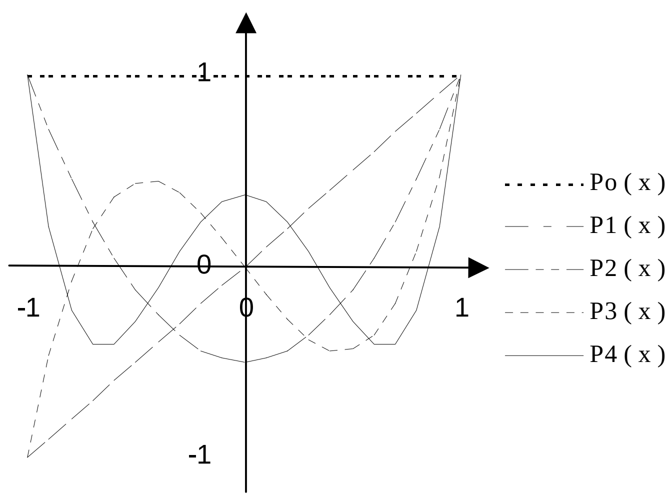
$$P_6(x) = \frac{1}{16}\left(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5\right)$$

$$P_7(x) = \frac{1}{16}\left(429x^7 - 693x^5 + 315x^3 - 35x\right)$$

$$P_8(x) = \frac{1}{128}\left(6435x^8 - 12012x^6 + 6930x^4 - 1260x^2 + 35\right)$$

etc.

Representación de los Polinomios de Legendre, en el intervalo (-1, 1) .



3.8 - Propiedades de los polinomios de Legendre:

Polinomios pares e impares:

Según que el índice n sea par o impar, el polinomio respectivo resulta también par o impar, como podemos comprobar observando los polinomios descriptos en el apartado anterior.

En efecto, por la Regla de O. Rodrigues, (3.15), es:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n\, n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2 - 1\right)^n \qquad (3.15)$$

También, cualquier potencia de $(x^2 - 1)$ es una función par.

La derivada primera de una función par es una función impar. La derivada segunda es par. La derivada tercera es impar., etc. Por lo tanto, si n es par, la derivada enésima, será una función par. Y en consecuencia el polinomio es también par.

Por el contrario, si n es impar, la derivada enésima de $(x^2 - 1)$ es una función impar, y consecuentemente, también lo será el polinomio respectivo.

Valor de los Polinomios para $x = \pm 1$:

Como también se ve en la figura anterior, para $x = 1$ los polinomios de Legendre son siempre iguales a 1, y para $x = -1$, los mismos valen alternadamente, + 1 y - 1. En efecto:

$$P_o(1) = P_o(-1) = 1$$

$$P_1(-1) = x = -1$$

$$P_1(1) = x = 1$$

$$P_2(1) = P_2(-1) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) = \frac{1}{2}(3 - 1) = 1$$

$$P_3(1) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) = \frac{1}{2}(5 - 3) = 1$$

$$P_3(-1) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) = \frac{1}{2}(-5 + 3) = -1$$

$$P_4(1) = P_4(-1) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) = \frac{1}{8}(35 - 30 + 3) = 1$$

etc.

Esto se puede expresar mediante la doble fórmula

$$\begin{cases} P_n(1) = 1 \\ P_n(-1) = (-1)^n \end{cases}$$

3.9 - Propiedades integrales de los polinomios. Ortogonalidad:

Los polinomios de Legendre forman un conjunto ortogonal de funciones en el intervalo

$$-1 \leq x \leq 1$$

Es decir:

$$\int_{-1}^{1} P_m(x) \cdot P_n(x)\, dx = \left| \begin{array}{ll} = 0 & \text{si } n \neq m \\ \\ \neq 0 & \text{si } n = m \end{array} \right.$$

Para demostrarlo, recordemos que tanto $P_m(x)$ como $P_n(x)$ son soluciones de la ecuación de Legendre, por lo que ambos deben satisfacerla. Podemos entonces hacer:

$$(1 - x^2)\, P''_n(x) - 2x\, P'_n(x) + n(n+1)\, P_n(x) = 0 \qquad (3.16)$$

$$(1 - x^2)\, P''_m(x) - 2x\, P'_m(x) + m(m+1)\, P_m(x) = 0 \qquad (3.17)$$

Consideremos el producto $(1 - x^2)\, P'_n(x)$

Si lo derivamos respecto de x, tenemos:

$$\frac{d}{dx}\left[(1 - x^2)\, P'_n(x)\right] = \frac{d}{dx}\left[P'_n(x) - x^2\, P'_n(x)\right] =$$

$$= P''_n(x) - 2x\, P'_n(x) - x^2\, P''_n(x) = (1 - x^2)\, P''_n(x) - 2x\, P'_n(x)$$

El último miembro de esta igualdad resulta ser idéntico a la primera parte de la ecuación de Legendre (3.16). Reemplazándolo en ella, podemos hacer alternativamente:

$$\frac{d}{dx}\left[(1 - x^2)\, P'_n(x)\right] + n(n+1)\, P_n(x) = 0$$

A continuación, multipliquemos ambos miembros por $P_m(x)$, e integremos entre -1 y 1:

$$\int_{-1}^{1} \frac{d}{dx}\left[(1 - x^2)\, P'_n(x)\right] . P_m(x)\, dx + \int_{-1}^{1} n(n+1)\, P_n(x)\, P_m(x)\, dx = 0$$

Para resolver la primera integral por partes, advirtiendo que

$$d\, P_m(x) = P'_m(x)\, dx ,$$

podemos llamar

$$v = P_m(x)$$

y $\qquad u = (1 - x^2)\, P'_n(x),$

la ecuación queda entonces así:

$$P_m(x) . (1 - x^2)\, P'_n(x)\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} (1 - x^2)\, P'_n(x)\, d\, P_m(x) +$$

$$+ n(n+1) \int_{-1}^{1} P_n(x)\, P_m(x)\, dx = 0$$

Aquí, el primer sumando es nulo, por serlo el binomio $1 - x^2$ tanto para x = 1 como para x = -1. Simplificándolo:

$$- \int_{-1}^{1} (1 - x^2)\, P'_n(x)\, P'_m(x)\, dx + n(n+1) \int_{-1}^{1} P_n(x)\, P_m(x)\, dx = 0$$

Si repetiéramos todo lo actuado, pero a partir de la (3.17), tomando $P_m(x)$ en lugar de $P_n(x)$, llegaríamos a una ecuación totalmente similar, salvo que los índices m y n aparecerán intercambiados entre sí:

$$-\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,P'_m(x)\,P'_n(x)\,dx + m(m+1)\int_{-1}^{1}P_m(x)\,P_n(x)\,dx = 0$$

Restando miembro a miembro las dos últimas ecuaciones, obtenemos:

$$[\,n(n+1) - m(m+1)\,]\int_{-1}^{1}P_m(x)\,P_n(x)\,dx = 0$$

Al analizar esta igualdad, vemos que si $m \neq n$, y por lo tanto

$$n(n+1) \neq m(m+1),$$

la integral del primer miembro debe ser, necesariamente, nula. Si por el contario, m = n, y por consiguiente el primer factor es igual a cero, se comprueba que, cualquiera sea el valor de n, la norma N del conjunto ortogonal de funciones es siempre igual a:

$$N = \int_{-1}^{1}[\,P_n(x)\,]^2\,dx = \frac{2}{2n+1} \qquad (3.18)$$

Los siguientes ejemplos son ilustrativos al respecto:

Ejemplos:

Para n = 0: $\displaystyle\int_{-1}^{1}[\,P_0(x)\,]^2\,dx = \int_{-1}^{1}dx = 2$

Si n = 1: $\displaystyle\int_{-1}^{1}[\,P_1(x)\,]^2\,dx = \int_{-1}^{1}x^2\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$

Si n = 2: $\displaystyle\int_{-1}^{1}[\,P_2(x)\,]^2\,dx = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}(3x^2-1)^2\,dx = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}(9x^4 - 6x^2 + 1)\,dx =$

$$= \frac{1}{4}\left.\left(\frac{9}{5}x^5 - 2x^3 + x\right)\right|_{-1}^{1} = \frac{1}{4}\left(\frac{9}{5} - 2 + 1 + \frac{9}{5} - 2 + 1\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\;\frac{18 - 20 + 10}{5} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$$

Etc.

Comprobamos que en todos los casos se va cumpliendo la igualdad (3.18). Reuniendo ambas conclusiones en una fórmula única, tenemos:

$$\int_{-1}^{1} P_m(x) \cdot P_n(x)\, dx = \begin{cases} = 0 & \text{si } n \neq m \\ = \dfrac{2}{2n+1} & \text{si } n = m \end{cases}$$

3.10 - Desarrollo de funciones en serie de Polinomios de Legendre:

Puesto que los polinomios son ortogonales entre sí, una función acotada y continua o con un numero finito de discontinuidades, en el intervalo (0, 1), puede ser expresada como una serie de polinomios de Legendre. Es decir:

$$f(x) = a_o P_o(x) + a_1 P_1(x) + a_2 P_2(x) + \ldots + a_n P_n(x) + \ldots = \sum_{n=o}^{\infty} a_n P_n(x)$$

Si en esta igualdad multiplicamos ambos miembros por $P_m(x)$, e integramos entre -1 y +1, todos los productos serán nulos salvo el que corresponde a n = m; obtenemos así la siguiente fórmula que permite calcular a_m:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, P_m(x)\, dx = a_n \int_{-1}^{1} P_n(x)\, P_m(x)\, dx \Bigg|_{n=m} = a_m \frac{2}{2m+1}$$

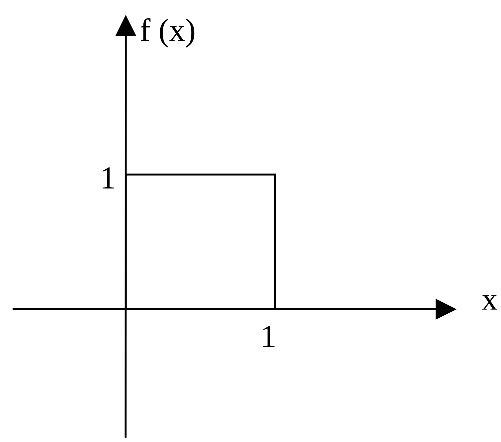
De aquí podemos despejar el valor respectivo de cada uno de los coeficientes, a_n:

$$a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x)\, P_n(x)\, dx$$

Ejemplo 1: Pulso cuadrado:

Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} = 0, & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ = 1, & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$



En este caso, los coeficientes de la serie responden a la fórmula genérica:

$$a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{0}^{1} P_n(x)\, dx$$

Procederemos a continuación a calcular a título de ejemplo, los primeros coeficientes:

$$a_o = \frac{1}{2}\int_0^1 P_o(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 dx = \frac{1}{2}$$

$$a_1 = \frac{3}{2}\int_0^1 P_1(x)\,dx = \frac{3}{2}\int_0^1 x\,dx = \frac{3}{4}\,x^2\Big|_0^1 = \frac{3}{4}$$

$$a_2 = \frac{5}{2}\int_0^1 \frac{1}{2}(3x^2 - 1)\,dx = \frac{5}{4}\left(x^3 - x\right)_{x=1} = 0$$

$$a_3 = \frac{7}{2}\int_0^1 \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)\,dx = \frac{7}{4}\left(\frac{5}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2\right)_{x=1} = \frac{7}{16}(5-6) = \frac{-7}{16}$$

$$a_4 = \frac{9}{2}\int_0^1 \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)\,dx = \frac{9}{16}\left(7x^4 - 10x^3 + 3x\right)_{x=1} = 0$$

$$a_5 = \frac{11}{2}\int_0^1 \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)\,dx = \frac{11}{16}\left(\frac{63}{6}x^6 - \frac{70}{4}x^4 + \frac{15}{2}x^2\right)_{x=1} =$$

$$= \frac{11}{96}(63 - 105 + 45) = \frac{33}{96} = \frac{11}{32}$$

$$a_6 = \frac{13}{2}\int_0^1 \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5)\,dx =$$

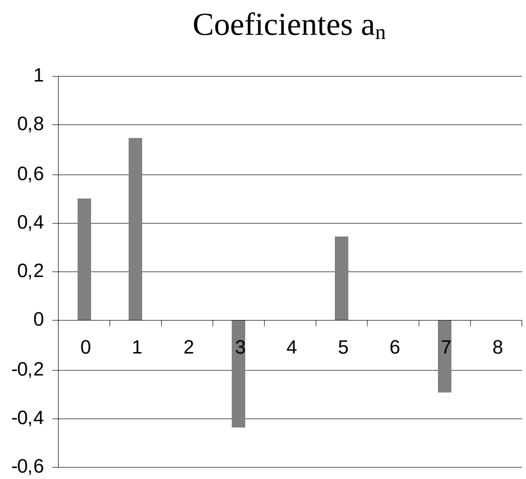
$$= \frac{13}{32}\left(\frac{231}{7}x^7 - \frac{315}{5}x^5 + \frac{105}{3}x^3 - 5x\right)_{x=1} = \frac{13}{32}(44 - 63 + 35 - 5) = 0$$

$$a_7 = \frac{15}{2}\int_0^1 \frac{1}{16}(429x^7 - 693x^5 + 315x^3 - 35x)\,dx =$$

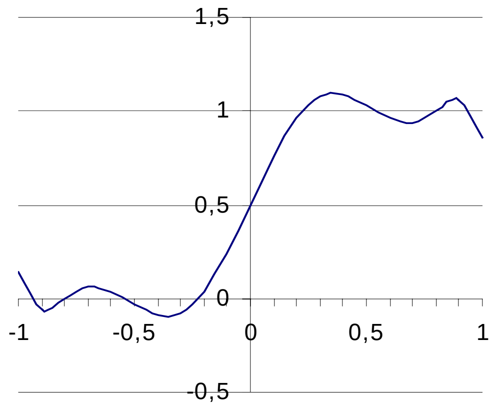
$$= \frac{15}{32}\left(\frac{429}{8}x^8 - \frac{693}{6}x^6 + \frac{315}{4}x^4 - \frac{35}{2}x^2\right)_{x=1} =$$

$$= \frac{15}{32}\left(\frac{429}{8} - \frac{693}{6} + \frac{315}{4} - \frac{35}{2}\right) = \frac{15}{256}(429 - 934 + 630 - 140) = -\frac{75}{256}$$

La figura siguiente representa los primeros coeficientes de la serie:

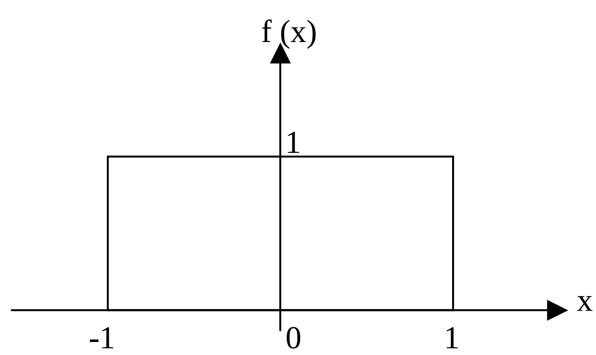


Por su parte, la representación de la serie, tomando solamente los primeros ocho términos, es la siguiente:



Ejemplo 2: Como segundo ejemplo consideraremos la función:

$$f(x) = 1, \quad \text{para} \quad -1 \leq x \leq 1$$



En este caso, la expresión general de los coeficientes es:

$$a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} P_n(x)\, dx$$

Calcularemos los primeros, como antes:

$$a_o = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} dx = \frac{1}{2} (1+1) = 1$$

Y la serie queda reducida a este primer término únicamente: $f(x) = a_o\, P_o(x) = 1$

Este resultado era evidente, como podemos comprobar con sólo observar la figura del pulso entre - 1 y + 1, rango de validez de la serie.

Los demás coeficientes deben ser nulos todos ellos. Efectivamente:

$$a_1 = \frac{3}{2} \int_{-1}^{1} P_1(x)\, dx = \frac{3}{2} \int_{-1}^{1} x\, dx = \frac{3}{4} x^2 \Big|_{-1}^{1} = \frac{3}{4} (1-1) = 0$$

$$a_2 = \frac{5}{2} \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} (3x^2 - 1)\, dx = \frac{5}{4} \left(x^3 - x \right)_{-1}^{1} = 0$$

$$a_3 = \frac{7}{2} \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} (5x^3 - 3x)\, dx = \frac{7}{4} \left(\frac{5}{4} x^4 - \frac{3}{2} x^2 \right)_{-1}^{1} = \frac{7}{16} (5 - 3 - 5 + 3) = 0$$

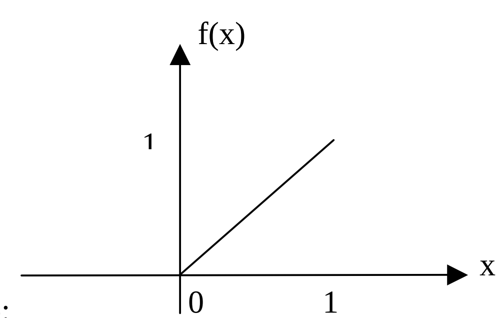
$$a_4 = \frac{9}{2} \int_{-1}^{1} \frac{1}{8} (35x^4 - 30x^2 + 3)\, dx = \frac{9}{16} \left(7x^4 - 10x^3 + 3x \right)_{-1}^{1} = 0$$

etc.

Como conclusión final podemos decir que, como la serie tiene un solo término, el desarrollo debe ser exacto, lo que realmente ocurre como muestra la figura.

Ejemplo 3: Pulso triangular:

$$f(x) = \begin{cases} = 0, & \text{si } -1 \le x \le 0 \\ = x, & \text{si } 0 \le x \le 1 \end{cases}$$



La fórmula genérica de los coeficientes es, en este caso:

$$a_n = \frac{2n+1}{2} \int_0^1 x \, P_n(x) \, dx$$

Por lo tanto:

$$a_o = \frac{1}{2} \int_0^1 x \, P_o(x) \, dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x \, dx = \frac{1}{4}$$

$$a_1 = \frac{3}{2} \int_0^1 x^2 \, dx = \frac{3}{2} \left(\frac{x^3}{3} \right)_{x=1} = \frac{1}{2}$$

$$a_2 = \frac{5}{2} \int_0^1 \frac{1}{2} (3x^3 - x) \, dx = \frac{5}{4} \left(\frac{3}{4} x^4 - \frac{1}{2} x^2 \right)_{x=1} = \frac{5}{4} \frac{1}{4} = \frac{5}{16}$$

$$a_3 = \frac{7}{2} \int_0^1 \frac{1}{2} (5x^4 - 3x^2) \, dx = \frac{7}{4} \left(x^5 - x^3 \right)_{x=1} = 0$$

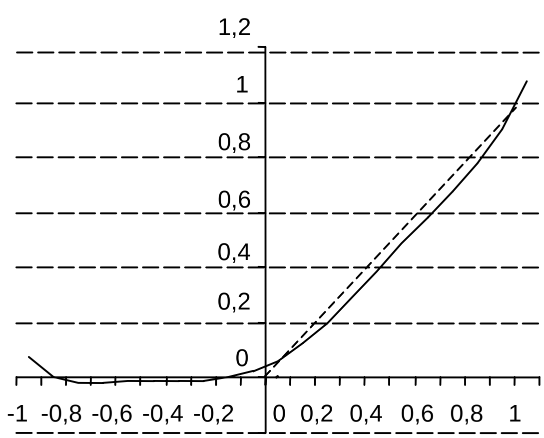
$$a_4 = \frac{9}{2} \int_0^1 \frac{1}{8} (35x^5 - 30x^3 + 3x) \, dx =$$

$$= \frac{9}{16} \left(\frac{35}{6} x^6 - \frac{30}{4} x^4 + \frac{3}{2} x^2 \right)_{x=1} = \frac{9}{96} \left(35 - 45 + 9 \right) = -\frac{9}{96} = -\frac{3}{32}$$

De modo similar obtendríamos los siguientes coeficientes de orden par:

$$a_6 = \frac{13}{256}, \quad a_8 = -\frac{85}{2560} = -\frac{17}{512}, \quad \text{etc.}$$

La representación de la serie, limitada a sus diez primeros términos, es decir desde a_o hasta a_9, es la siguiente (La línea punteada representa la función original):



3.11 - Problemas:

3.11.1 - Dada la ecuación diferencial

$$(x - a)^2 y'' + (x - a)\, y'\, e^x - y \cos x = 0$$

se pide:

a) Hallar y resolver la ecuación indicial correspondiente.

b) Calcular los primeros coeficientes de la solución.

Solución:

a) Desarrollaremos las dos funciones de x alrededor del punto a = 0. Es decir:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$-\cos x = -1 + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots$$

De aquí surgen los valores de los coeficientes α_j y β_k:

$\alpha_o = 1,\quad \alpha_1 = 1,\quad \alpha_2 = 0{,}5,\quad \alpha_3 = 1/6,\quad$ etc.

$\beta_o = -1,\quad \beta_1 = 0,\quad \beta_2 = 0{,}5,\quad \beta_3 = 0,\quad$ etc.

La ecuación indicial

$$\gamma^2 + (\alpha_o - 1)\gamma + \beta_o = 0$$

es aquí

$$\gamma^2 - 1 = 0$$

cuya solución es $\gamma = \pm 1$. Adoptaremos $\gamma = 1$

b) Cálculo de los coeficientes:

$c_o = 1$ (Se adopta)

$$c_1 = \frac{-\alpha_1 \gamma + \beta_1}{\gamma(\gamma + 1) + \alpha_o(\gamma + 1) + \beta_o} = -\frac{1}{3}$$

$$c_2 = \frac{(\alpha_2 \gamma + \beta_2) + c_1 [\alpha_1 (\gamma + 1) + \beta_1]}{(\gamma + 1)(\gamma + 2) + \alpha_o(\gamma + 2)} = \frac{1}{27}$$

etc.

3.11.2 - Sea la ecuación diferencial

$$x^2 y'' + y'\, x \,.\cos x - (x^2 - 2x + 2)\, y = 0$$

Se pide:

a) Resolver la ecuación indicial

b) Hallar los tres primeros coeficientes de la solución.

Respuestas:

a) Ecuación indicial:

$\gamma^2 - \gamma - 2 = 0$ Raíces: $\gamma_1 = 2$, $\gamma_2 = -1$

b) Coeficientes de la solución:

Si adoptamos $\gamma = \gamma_1 = 2$

$\therefore$ $c_o = 1$

$c_1 = -2$

$c_2 = -\dfrac{27}{40}$ etc.

3.11.3 - Dada la ecuación diferencial

$$x\, y'' + 3\, y' - \frac{3}{4} \cdot \frac{y}{1 - x} = 0$$

se pide:

a) Expresarla como una ecuación hipergeométrica.

b) Calcular los primeros coeficientes de la solución como tal.

Solución:

a) $(1 - x)\; x\, y'' + (3 - 3\,x)\, y' - \dfrac{3}{4}\, y = 0$

Aquí tenemos:

$C = 3$, $A + B + 1 = 3$ y $A \,.\, B = \dfrac{3}{4}$

Una solución de este sistema es

$A = \dfrac{1}{2}$ $B = \dfrac{3}{2}$

b) Los coeficientes de la solución son:

$c_o = 1$ (Se adopta)

$c_1 = \dfrac{A\,B}{C} = \dfrac{1}{4}$

$$c_2 = \frac{(A+1).(B+1)}{2\ (C+1)}\ c_1 = \frac{15}{128}$$

$$c_3 = \frac{(A+2).(B+2)}{3\ (C+2)}\ c_2 = \frac{35}{512}$$

$$c_4 = \frac{(A+3).(B+3)}{4\ (C+3)}\ c_3 = \frac{735}{16384}$$

etc.

3.11.4 - Cualquier polinomio cuyos coeficientes sean todos reales puede ser desarrollado como suma algebraica de Polinomios de Legendre. Se pide desarrollar de tal forma los polinomios siguientes:

a) $f(x) = x^3 + 2x^2 + x - 1$

Solución: Los dos primeros monomios los obtenemos en función, respectivamente de los polinomios de Legendre

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \qquad \text{y} \qquad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

Haremos

$$\frac{2}{5} P_3(x) + \frac{4}{3} P_2(x) = x^3 - \frac{3}{5}x + 2x^2 - \frac{2}{3} = f_1(x)$$

Ahora restemos este polinomio de la función original, f (x). La diferencia es:

$$f(x) - f_1(x) = \frac{8}{5}x - \frac{1}{3}$$

Para completar la función f (x), recurrimos a los polinomios P_o y P_1, así:

$$f(x) = \frac{2}{5} P_3(x) + \frac{4}{3} P_2(x) + \frac{8}{5} P_1(x) - \frac{1}{3} P_0(x)$$

b) $f(x) = x^4 - 4$

c) $f(x) = -3x^3 + 2x^2 - 3x - 2$

3.11.5 - Representar las parábolas siguientes en función de los polinomios de Legendre.

a) $y = 4x^2 - 1$

Solución: Hagamos:

$$y = A \ P_2(x) + B \ P_0(x) = A \left(\frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{2} \right) + B = 4x^2 - 1$$

Determinación de las constantes A y B:

$$\frac{3}{2} A = 4 \qquad \therefore \qquad A = \frac{8}{3}$$

$$B - \frac{A}{2} = -1 \qquad \therefore \qquad B = -1 + \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$$

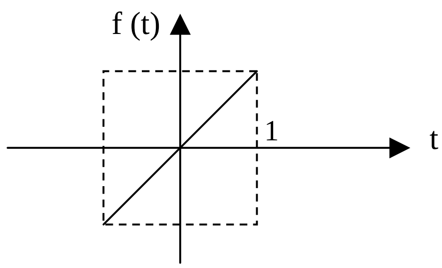
Respuesta: $y = \dfrac{8}{3} P_2(x) + \dfrac{1}{3} P_0(x)$

b) $y = 3x^3 - 2$

3.11.6 - Desarrollar las funciones siguientes en serie de Polinomios de Legendre:

a) $f(t) = t$, para $-1 \leq t \leq 1$

Gráficamente:



Solución:

Obviamente, el desarrollo pedido es, en este caso, $f(t) = P_1(t)$. En efecto:

$$a_o = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} t \ P_o(t) \ dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} t \ dt = 0$$

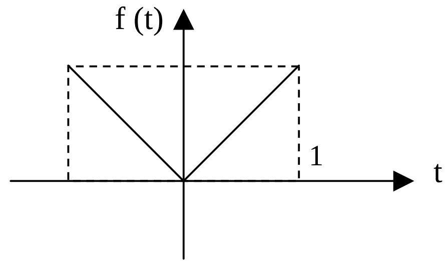
$$a_1 = \frac{3}{2} \int_{-1}^{1} t^2 \ dt = \frac{3}{2} \left. \frac{t^3}{3} \right|_{-1}^{1} = \frac{1}{2} (1 + 1) = 1$$

$$a_2 = \frac{5}{2} \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} (3t^3 - t) \, dt = \frac{5}{4} \frac{3}{4} \left(t^4 - \frac{1}{2} t^2 \right)_{-1}^{1} = 0$$

$$a_3 = \frac{7}{2} \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} \left(5\,t^4 - 3\,t^2 \right) dt = 0 \qquad \text{etc.}$$

b) $f(t) = |t|,$ para $-1 \leq t \leq 1$

Gráficamente:



Solución: Tomar

$$f(t) = \begin{cases} = -t & \text{para } -1 \leq t \leq 0 \\ = t & \text{para } 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

e integrar.

Respuesta: $a_o = \dfrac{1}{2}$ $\quad a_1 = 0$ $\quad a_2 = \dfrac{5}{8}$ $\quad a_3 = 0$

$a_4 = -\dfrac{3}{16}$ $\quad a_5 = 0$ $\quad$ etc.

Aplicaciones Matlab.

- *Solución de ecuaciones diferenciales de segundo orden. Ejemplos:*

```
» % Resolver la ecuación diferencial: y"(t) = 16 y(t)
» y = dsolve (' D2y=16*y')
y =  C1*exp (4*t) + C2*exp (-4*t)  % C1 y C2 son constantes arbitrarias.

»
» y = dsolve ('D2y + Dy = 2*y')
 y =  C1*exp (t) + C2*exp (-2*t)

»
» syms w  % El comando syms permite introducir variables diferentes de las propias (y, t).
» y = dsolve (' D2y = -w ^ 2*y ' , ' y(0) = 0 ')
y = C2*sin (w*t)

»
»  y = dsolve (' D2y = -w ^ 2*y ' , ' y(0) = 1')
y =  cos (w*t) + C2*sin (w*t)

»
» y = dsolve ('D2y + 6*Dy = -9*y','y(0) = 3')
y = 3*exp(-3*t)+C2*exp(-3*t)*t


» % Resolver la ecuación diferencial de segundo orden:
» % y'' + 2*t (t-a)*y' - t^2/(t-a)^2*y = 0
» syms  t  y
» % Sea a = 5
» y = dsolve ('D2y + 2/(t-5)*Dy - 2/(t-5)^2*y = 0','y(0) = 0','Dy(0) = 2')
y =  (2/3*t^3-10*t^2+50*t)/(t-5)^2
» Dy = diff (y)
Dy = (2*t^2 -20*t+50)/(t -5)^2 -2*(2/3*t^3 -10*t^2+50*t)/( -5)^3
» D2y = diff (Dy)
D2y = (4*t-20)/(t-5)^2-4*(2*t^2-20*t+50)/(t-5)^3+6*(2/3*t^3-10*t^2+50*t)/(t-5)^4
»
» % Verificación del resultado:  Llamemos; F = D2y + 2/(t-5)*Dy - 2/(t-5)^2*y
» F = D2y + 2/(t-5)*Dy - 2/(t-5)^2*y
F =  (4*t-20)/(t-5)^2-4*(2*t^2-20*t+50)/(t-5)^3+4*(2/3*t^3-10*t^2+50*t)/(t-5)^4
        +2/(t-5)*((2*t^2-20*t+50)/(t-5)^2-2*(2/3*t^3-10*t^2+50*t)/(t-5)^3)
» % Sea por ejemplo t = 2:
» F_2 = (4*2-20)/(2-5)^2-4*(2*2^2-20*2+50)/(2-5)^3+4*(2/3*2^3-10*2^2+50*2)/(2
        -5)^4+2/(2-5)*((2*2^2-20*2+50)/(2-5)^2-2*(2/3*2^3-10*2^2+50*2)/(2-5)^3)
F_2 =    0
```

- *Ecuación diferencial de Legendre:*

```
» % La Ecuación de Legendre: (1- x ^ 2)*y" - 2*x*y' + n*(n -1)*y = 0
» % es una ecuación hipergeométrica: (x*(1-x)*y" + (C - x - (A + B)*x)*y' - A*B*y = 0
» % donde los coeficientes valen: C = 1, A = - n y B = n+1.
»
» % Se trata de hallar la solución de la ecuación de Legendre para n = 1:
» % Recuérdese que la instruccción DSOLVE requiere denominar t e y a las variables.
» syms   C1   C2   t
» y = dsolve (' t*(1- t)*D2y + (1- 2*t)*Dy = 0 ')
y =  C1- C2*log (t)+C2*log (-1+t)
» % Verificaremos este resultado. Hagamos:
» z = diff (y)
z = - C2/t+C2/(-1+t)
»  t*(1-t)*diff(z) + (1-2*t)*diff (y)
ans =  t*(1- t)*(C2/t ^ 2 - C2/(-1+t) ^ 2)+(1-2*t)*(- C2/t+C2/(-1+t))
» % Esta ecuación no indica en forma directa si la solución es correcta.
» % Ensayemos asignar un valor arbitrario a la variable "t":
» t=3;
» t*(1-t)*(C2/t ^ 2-C2/(-1+t) ^ 2)+(1-2*t)*(-C2/t+C2/(-1+t))
ans = 0
» % Otra posible forma de verificación es aplicar la función: PLOT. En efecto:
» plot (t*(1-t)*(C2/t ^ 2-C2/(-1+t) ^ 2)+(1-2*t)*(-C2/t+C2/(-1+t)))
» % entrega una línea coincidente con el eje de abscisas, es decir: y (t) = 0
```

- *Verificar que el polinomio enésimo de Legendre es solución de la ecuación de Legendre de coeficiente n:*

```
» syms t
» % Sea por ejemplo, n = 3. El polinomio enésimo es:
» P3 = (5/2*t ^ 3 - 3/2*t)
P3 = 5/2*t ^ 3 - 3/2*t
» z = diff (P3)
z = 15/2*t ^ 2-3/2
» diff (z)
ans = 15*t
» % La ecuación de Legendre para n = 3 es: f = (1- t ^ 2)*D2y -2*t*Dy+12*y
» y = ((1- t ^ 2)*diff (z) - 2*t*z  +12*P3)
y = 15*(1- t ^ 2)*t - 2*t*(15/2*t ^ 2 - 3/2)+30*t ^ 3 -18*t
» % Verificaremos para un valor arbitrario de t. Por ejemplo,
» t = 10;
» 15*(1- t ^ 2)*t - 2*t*(15/2*t ^ 2 - 3/2)+30*t ^ 3 -18*t
ans =      0
```

- *Cálculo de Polinomios de Legendre:*

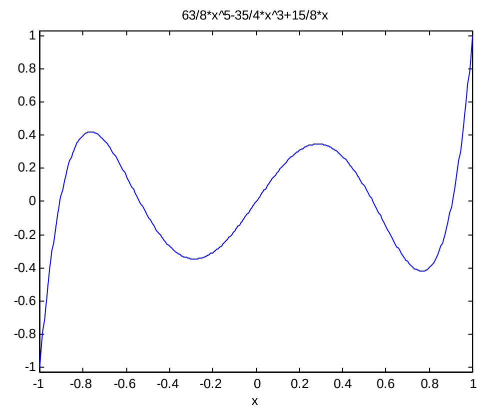
```
» % Sea, por ejemplo: n = 5. Utilizaremos la fórmula de O. Rodrigues.
» % P5 (t) = 1/(2 ^ 5*fact(5))* D5 ((t ^ 2-1) ^ 5)
» fact5 = prod (1 : 1 : 5)
fact5 =   120
» syms t
» % Llamemos D5 = D5((t ^ 2-1)5)
» D5 = diff(diff(diff(diff(diff((t ^ 2-1) ^ 5)))))
D5 = 3840*t ^ 5+19200*(t ^ 2-1)*t ^ 3+7200*(t ^ 2-1) ^ 2*t
» y = D5/(2 ^ 5*fact5)
y = t ^ 5+5*(t ^ 2 -1)*t ^ 3  +15/8*(t ^ 2 -1) ^ 2*t
» % Ordenando esta ecuación, tenemos:
» % P5 = (1+5+15/8)*t ^ 5+(-5-15/4)*t ^ 3+15/8*t = 63/8 * t ^ 5 - 35/4*t ^ 3  +15/8*t
```

- *Verificar que el polinomio hallado es solución de la ecuación para n = 5:*

```
» syms t
» P5 = 63/8 * t ^ 5 - 35/4*t ^ 3  +15/8*t
P5 = 63/8*t ^ 5 -35/4*t ^ 3+15/8*t
» z = diff (P5)
z =  315/8*t ^ 4 -105/4*t ^ 2+15/8
»  y = (1-t ^ 2)*diff (z) - 2*t*z+30*P5
y = (1- t ^ 2)*(315/2*t ^ 3 -105/2*t) -2*t*(315/8*t ^ 4 -105/4*t ^ 2+15/8)+945/4*t ^ 5
        - 525/2*t ^ 3+225/4*t
» % Verificaremos que esta solución es correcta tomando cualquier valor arbitrario para t
» % Probemos haciendo t = 1
» t=1
t =     1
» ((1- t ^ 2)*(315/2*t ^ 3 -105/2*t) -2*t*(315/8*t ^ 4 -105/4*t ^ 2+15/8)+945/4*t ^ 5
        - 25/2*t ^ 3+225/4*t)
ans =    0
» % Probemos nuevamente haciendo t = 3
» t=3
t =    3
» ((1- t ^ 2)*(315/2*t ^ 3 -105/2*t) - 2*t*(315/8*t ^ 4 -105/4*t ^ 2+15/8)+945/4*t ^ 5
        -525/2*t ^ 3+225/4*t)
ans =    0
» % Esta prueba es rápida, y en general aceptable porque elegimos t arbitrariamente. Sin recurrir a programación Matlab, la solución correcta consiste en evaluar paso a paso la función
» % F = (-315/2-315/4+945/4)*t ^ 5  + (315/2+105/2+105/2-525/2)*t ^ 3 +
        + (105/2-15/4+225/4)*t = 0
```

- *Representación de polinomios de Legendre:*

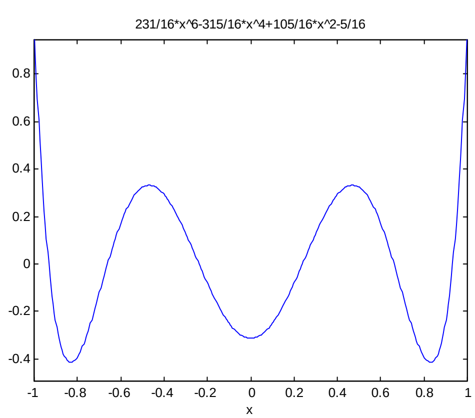
```
» % Sea repreentar el Polinomio P5(x):
» y = (63/8*x ^ 5-35/4*x ^ 3+15/8*x)
y =
63/8*x ^ 5-35/4*x ^ 3+15/8*x
» ezplot (y,-1,1)
»
```

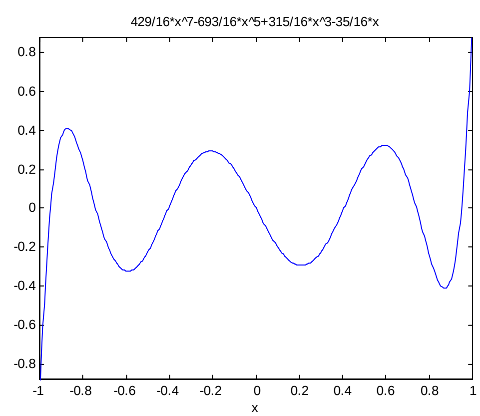


- *Representar los polinomios P6 y P7:*

```
» clear all
» syms x
» P6 = 231/16*x ^ 6-315/16*x ^ 4+105/16*x ^ 2-5/16
P6 =
231/16*x ^ 6-315/16*x ^ 4+105/16*x ^ 2-5/16
» ezplot (P6,-1,1)
»

» P7 = 429/16*x ^ 7-693/16*x ^ 5+315/16*x ^ 3-35/16*x
P7 =
429/16*x ^ 7-693/16*x ^ 5+315/16*x ^ 3-35/16*x
»  ezplot (P7, -1, 1)
»
```

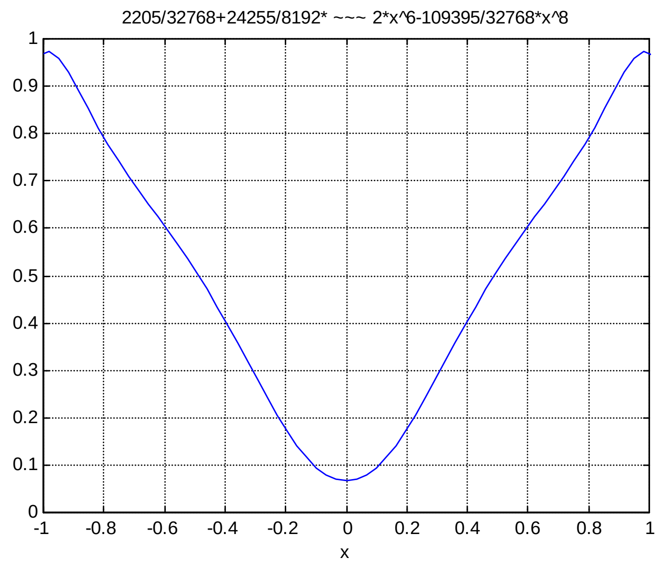




- *Desarrollar la función f(t) = | t | en serie de polinomios de Legendre.*

```
» % Problema 3.11.6.b - Desarrollar la función f(x) = |x|
» % en serie de polinomios de Legendre.
» % Recordemos que el desarrollo en serie de polinomios de Legendre
» % es válido únicamente entre -1 y 1.
»
» % Expresión de los polinomios de Legendre:
» P0 = 1;
» P1 = x;
» P2 = 1/2*(3*x^2-1);
» P3 = 1/2*(5*x^3-3*x);
» P4 = 1/8*(35*x^4-30*x^2+3);
» P5 = 1/8*(63*x^5-70*x^3+15*x);
» P6 = 1/16*(231*x^6-315*x^4+105*x^2-5);
» P7 = 1/16*(429*x^7-693*x^5+315*x^3-35*x);
» P8 = 1/128*(6435*x^8-12012*x^6+6930*x^4-1260*x^2+35)
»
» % Cálculo de los coeficientes:
» a0 = 1/2*(int(-x*P0,x,-1,0) + int(x*P0,x,0,1))
a0 = 1/2
» a1 = 3/2*(int(-x*P1,x,-1,0) + int(x*P1,x,0,1))
a1 = 0
» a2 = 5/2*(int(-x*P2,x,-1,0) + int(x*P2,x,0,1))
a2 =  5/8
» a3 = 7/2*(int(-x*P3,x,-1,0) + int(x*P3,x,0,1))
a3 =  0
» a4 = 9/2*(int(-x*P4,x,-1,0) + int(x*P4,x,0,1))
a4 =  -3/16
» a5 = 11/2*(int(-x*P5,x,-1,0) + int(x*P5,x,0,1))
a5 =  0
» a6 = 13/2*(int(-x*P6,x,-1,0) + int(x*P6,x,0,1))
a6 = 13/128
» a7 = 15/2*(int(-x*P7,x,-1,0) + int(x*P7,x,0,1))
a7 =  0
» a8 = 17/2*(int(-x*P8,x,-1,0) + int(x*P8,x,0,1))
a8 =  -17/256
»
» % Desarrollo de la función (Omitimos los términos de coeficiente nulo):
»
»  F = a0*P0 + a2*P2 + a4*P4 + a6*P6 + a8*P8
F = 2205/32768 +24255/8192*x^2 -105105/16384*x^4+63063/8192*x^6
          -109395/32768*x^8
» %
```

```
» % Representación de la serie:
» ezplot (F)
» axis ([-1, 1, 0, 1])
» grid
```




```
» % Verificación del Problema 3.11.4.a: Desarrollo de un Polinomio de coeficientes
» % reales como suma de Polinomios de Legendre:
» syms x
» f = x ^ 3+2*x ^ 2+x-1
f =
x ^ 3+2*x ^ 2+x-1
» P0 = 1;
» P1=x;
» P2 = 1.5*x ^ 2-0.5;
» P3 = 2.5*x ^ 3-1.5*x;
» % El desarrolllo de f como suma de Polinomios Legendre es:
» g = 2/5*P3+4/3*P2+8/5*P1-1/3*P0          % En efecto:
g =
x ^ 3+x+2*x ^ 2-1


% Desarrollar la Parábola:  y = 4*x ^ 2, en suma de Polinomios de Legendre:
» y =  8/3*P2+4/3*P0
y =
4*x ^ 2
```

```
» % Verificación del Problema 3.11.5.a: Desarrollo de la Parábola y = 4*x ^ 2-1
» % en función de los Polinomios de Legendre:
» syms x
» y = 4*x ^ 2-1;
» % El desarrollo es:
» y1 = 8/3*P2+1/3*P0      % En efecto:
y1 =
4*x ^ 2-1


» % Verificación problema 3.11.1
» % Ecuación diferencial (t-a) ^ 2*y''+(t-a)*y'*exp(t)-y*cos(t)=0
» % Valor de los coeficientes: ai, coeficientes del desarrollo de exp(t):
» a0 = 1;
» a1=1;
» a2=.5;
» a3=1/2/3
a3 =    0.1667
» a4=1/2/3/4
a4 =    0.0417
» a5=1/2/3/4/5
a5 =     0.0083
» a6=1/2/3/4/5/6
a6 =    0.0014
» % Etc. Los coeficientes bi son los del desarrollo en serie de cos(t):
» b0=-1;
» b1=0;
» b2=1/2;
» b3=0;
» b4=-1/2/3/4
b4 =   -0.0417
» b5=0;
» b6=1/2/3/4/5/6
b6 =    0.0014
» % Adoptaremos:
» gamma = 1;        % y
» c0 =1
» % Cálculo de los coeficientes ci:
» c1 = (-a1*gamma+b1)/((gamma+a0)*(gamma+1)+b0)
c1 =   -0.3333
» c2 = ((a2*gamma+b2)+c1*(a1*(gamma+1)+b1))/(gamma+1+a0)/(gamma+2)
c2 =    0.0370
```

```
» % Representar el desarrollo del pulso cuadrado del Apartado 3.10, Ejemplo 1:
» % Ingreso de los Polinomios de Legendre:
» P0 = 1;
» P1 = x;
» P2 = 1/2*(3*x ^ 2-1);
» P3 = 1/2*(5*x ^ 3-3*x);
» P4 = 1/8*(35*x ^ 4-30*x ^ 2+3);
» P5 = 1/8*(63*x ^ 5-70*x ^ 3+15*x);
» P6 = 1/16*(231*x ^ 6-315*x ^ 4+105*x ^ 2-5);
» P7 = 1/16*(429*x ^ 7-693*x ^ 5+315*x ^ 3-35*x);
» P8 = 1/128*(6435*x ^ 8-12012*x ^ 6+6930*x ^ 4-1260*x ^ 2+35);
»
» % Cálculo de los coeficientes ai:
» a0 = 0.5*int(P0,x,0,1)
a0 =  1/2
» a1 = 1.5*int(P1,x,0,1)
a1 =  3/4
» a2 = 2.5*int(P2,x,0,1)      % Los coeficientes pares son nulos.
a2 =  0
» a3 = 3.5*int(P3,x,0,1)
a3 =  -7/16
» a5 = 5.5*int(P5,x,0,1)
a5 =  11/32
» a7 = 7.5*int(P7,x,0,1)
a7 =  -75/256
» % etc.
» % Representación del desarrollo en serie:
» F = a0*P0 + a1*P1 + a3*P3 + a5*P5 + a7*P7
F =  1/2+11025/4096*x-40425/4096*x ^ 3+63063/4096*x ^ 5-32175/4096*x ^ 7
» ezplot (F)
» axis ([ -1, 1, -0.2, 1.2])
» grid
```